ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

Теорию булевых функций и их минимизации можно считать по праву центральным моментом для математического образования любых инженеров, чья деятельность подразумевает активное использование ЭВМ.

6 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. ДВОЙСТВЕННЫЕ И САМОДВОЙСТВЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Довольно часто при описании различных ситуаций (при моделировании некоторых процессов) применимы функции, аргументы которых могут принимать только два каких-то значения (например, *да* или *нет*, *истинно* или *ложно*, *0* или *1* и т.д.), и сами эти функции принимают тоже только два значения.

Пример 6.1 Пусть, например, аргумент x принимает значения «истинно» и «ложно»; y – «включено» и «выключено»; z –«чёрное» или «белое»; а сама функция $f(x,y,z)$ – «работает» или «не работает».

Для обработки результатов нет нужды помнить о смысле переменных и самой функции, а можно считать, что и сама функция, и её аргументы принимают одинаковые значения, например, *0* или *1*. Этого можно добиться следующим не очень хитрым приёмом, который мы проиллюстрируем на предыдущем примере. Вместо переменной x рассмотрим переменную x_1, принимающую значение *1*, когда x истинно и *0* при ложном x; вместо $y - y_1$, принимающую значение *1*, когда y имеет значение «включено», а при выключенном y – значение *0*; вместо $z - z_1$; вместо $f(x,y,z) - f_1(x,y,z)$. После получения результата можно опять вспомнить о смысле аргументов и произвести расшифровку.

Булевыми называются функции, определенные на множестве $\{0,1\}$, состоящем из двух элементов 0 и 1, и принимающие значения тоже на этом множестве, т.е. это такие функции, у которых и аргументы и значения самой функции могут принимать только два значения. Когда эти два значения означают «истинно» и «ложно», то мы имеем дело с уже знакомыми нам по разделу 2 функциями (или связками) алгебры логики.

Из определения следует, что область определения булевой функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (см. таблицы 3.1, 3.2, 6.1-4).

Порядок расположения наборов значений переменных, обычно принятый при заполнении таблицы, называется *лексикографическим* (*алфавитным* или *словарным*), иногда *стандартным* или *естественным*. Действительно, он – естественный в следующем смысле: каждому набору $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, где α_i есть 0 или 1, можно сопоставить в соответствие

Таблица 6.1 – Задание булевой функции таблицей значений

№	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n		$f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$
0	0	0	0	...	0	0	0		$f(0,0,0,\ldots,0,0,0)$
1	0	0	0	...	0	0	1		$f(0,0,0,\ldots,0,0,1)$
2	0	0	0	…	0	1	0		$f(0,0,0,\ldots,0,1,0)$
...	...	...	…	...	…	...	...		....
2^n-3	1	1	1	...	1	0	1		$f(1,1,1,\ldots,1,0,1)$
2^n-2	1	1	1	...	1	1	0		$f(1,1,1,\ldots,1,1,0)$
2^n-1	1	1	1	...	1	1	1		$f(1,1,1,\ldots,1,1,1)$

число $N = \alpha_1 \cdot 2^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot 2 + \alpha_n$, таким образом, наборам (0,0,...,0,0,0), (0,0,...,0,0,1), (0,0,...,0,1,0), ..., (1,1,...,1,1,0), (1,1,...,1,1) соответствуют числа 0, 1, 2, ..., 2^n-2, 2^n-1 (в таблице 6.1 эти номера проставлены в крайнем левом столбике). Естественным порядком будет расположение наборов в порядке возрастания соответствующих им чисел. Натуральное число, соответствующее входному набору, является его номером. Поэтому очевидно, что количество k входных наборов для булевой функции от n аргументов равно $k=2^n$ (т.е. числу рабочих строк в таблице значений).

Количество же различных функций n переменных можно определить из следующих соображений. Договоримся всюду далее записывать значения переменных только в каком-то определённом порядке, например, в лексикографическом. Тогда каждая функция однозначно задается набором своих $k = 2^n$ значений (для n входных наборов), которому также можно поставить в соответствие k-разрядное двоичное число. Располагая теперь в таблице функции в порядке возрастания соответствующих им чисел, мы получим все возможные различные функции. Количество таких функций будет равно $2^k = 2^{2^n}$.

6.1 Основные или элементарные булевы функции

Переменные, которые могут принимать только два значения, называют вслед за функциями тоже *булевыми* (в честь английского математика 19 века Дж. Буля), иногда также *логическими* переменными или *пропозициональными* (см. подраздел 3.2). Более точно, логическая переменная x может подразумевать какое-то высказывание. При этом значение переменной x считается равным *0*, если то высказывание, которое она обозначает ложно, и равным *1*, если это высказывание истинно. Например, высказывание *x=«Волга впадает в Каспийское море»* является истинным и, значит, с точки зрения дискретной математики принимает значение *1*, а высказывание *«в неделе 8 дней»* является ложным, и переменная, которая заменяет это высказывание, принимает значение *0*.

Количество аргументов, от которых зависит функция (не обязательно булева), называется её *местностью* или *арностью*.

6.1.1 *Нульместные* булевы функции. Нетрудно понять, что их только две, это: $f_0(x) = 0$ – функция тождественно равная 0 (кратко – *тождественный нуль*), и $f_1(x) = 1$ – функция тождественно равная *1* (кратко – *тождественная единица*).

6.1.2 *Унарные* (*одноместные*) булевы функции. По существу их тоже только две (а формально – немного больше!). Это: $F(x) = x$ – *тождественная* функция (иногда говорят *функция-переменная* x), и $\overline{x} = \neg x$ – *отрицание* или *инверсия* (произносят – *«не икс»)*. В полном соответствии с интуицией $\overline{x} = 0$, если $x = 1$, и $\overline{x} = 1$ при $x = 0$. Значение этих функций удобно определить простой таблицей 6.2.

Таблица 6.2 – Одноместные булевы функции

x	$F(x)$	$\overline{x}$
0	*0*	*1*
1	*1*	*0*

Отрицание иногда обозначают и в виде $\sim x$ (так называемое *отрицание Лукасевича*). Однако мы не будем употреблять это и некоторые другие обозначения. Оба предыдущих обозначения удобны, но каждое – в определённой ситуации.

6.1.3 Наиболее часто употребляемые функции двух аргументов (*бинарные* или *двухместные*) представлены в таблице 6.3. Но это – не все двухместные функции (а сколько их всего?).

Таблица 6.3 – Основные бинарные булевы функции

x	y	f_0	f_1	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \uparrow y$
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Обратите внимание, что первые три функции в этой таблице – это уже знакомые нам: 1) $f_0(x,y) = 0$ – тождественный ноль *(константа 0)*; 2) $f_1(x,y) = 1$ – тождественная единица *(константа 1)*; 3) $\overline{x}$ – отрицание x, то есть функции с одним аргументов или даже совсем без аргументов рассматриваются как двухместные. В чём тут дело мы разберёмся немного дальше (см. подраздел 6.3).

Остальные семь функций в этой таблице – собственно двухместные. Рассмотрим их подробнее (в п. 3.2.3 мы уже исследовали часть этих функций с точки зрения логики).

а) $x \wedge y$ – *конъюнкция*. Вместо знака «$\wedge$» часто употребляются знаки «&», «*», «·», или знак операции иногда просто опускается: $x \wedge y = x \,\&\, y = x \cdot y = xy$. Все эти обозначения удобны в разных ситуациях, и мы их будем использовать. Эту функцию часто называют *логическим произведением* или логическим умножением. Заметим, что конъюнкция – это фактически обычное *умножение* (нулей и единиц). С точки зрения логики – это союз «*И*». Ещё один смысл этой операции – *м и н и м у м* от значений аргументов;

б) $x \vee y$ – *д и з ъ ю н к ц и я (соединительное ИЛИ)*. Дизъюнкцию иногда обозначают и в виде $x + y$, и называют тогда логическим сложением. Однако эти название (логическое сложение) и обозначение «+» – устаревшие и не совсем удачные, поэтому мы ими пользоваться не будем. А не удачное это название по той простой причине, что чуть ниже в п. д) мы познакомимся с другой функцией, у которой гораздо больше оснований называться сложением. Кроме того, употребление знака «+» вместо «$\vee$» чревато недоразумениями, как показывает пример 6.2 ниже.

Гораздо полезнее, чем логическое сложение, рассматривать дизъюнкцию как *м а к с и м у м* значений аргументов;

в) $x \to y$ – *и м п л и к а ц и я.* Иногда её обозначают $x \supset y$, но мы это обозначение употреблять не будем. Это очень важная функция, особенно в логике (см. разделы 3, 4 и 5). Ее можно рассматривать как *формально логическое следование* и читать *«из x следует y»*;

г) $x \equiv y$ – *э к в и в а л е н т н о с т ь.* Вместо знака «$\equiv$» часто употребляются знаки «~» и «$\leftrightarrow$». Логический смысл этой функции очевиден: она утверждает, что x и y имеют одинаковые значения;

д) $x \oplus y$ – *с л о ж е н и е п о м о д у л ю 2* (*исключающее ИЛИ, альтернация*, союз «*либо x, либо y*»). Эта функция более подходит на роль сложения, чем дизъюнкция. Действительно, по модулю 2 все целые числа делятся на два класса – чётные и нечётные. Представителем всех чётных чисел может служить *0*, а нечётных – *1*. Сумма двух чётных чисел – число снова чётное (первая строка таблицы 6.3), нечётное плюс чётное дают в итоге нечётное (вторая и третья строки таблицы), и два нечетных числа в сумме дают чётное. Далее иногда эту операцию будем обозначать просто плюсиком – *«+»*.

е) $x \mid y$ – *ш т р и х Ш е ф ф е р а* (когда $x = y = 1$, то $x \mid y = 0$, в остальных случаях $x \mid y=1$); логический смысл – отрицание конъюнкции.

ж) $x \uparrow y$ – *с т р е л к а П и р с а* (когда $x=y=0$, то $x \uparrow y=1$, в остальных случаях $x \uparrow y=0$); логический смысл – отрицание дизъюнкции. Иногда её обозначают $\downarrow$.

Штрих Шеффера и стрелку Пирса вместе с некоторыми другими функциями иногда называют *ф у н к ц и я м и В е б б а.*

Как видно из таблицы 6.3 логический смысл последних трёх функций неинтересен – они являются просто отрицаниями других функций. Но эти функции имеют интересные технические приложения.

П р и м е р 6.2 Покажем, что употребление знака «+» для обозначения дизъюнкции способно привести к серьёзным недоразумениям, во избежание этого, мы настоятельно советуем избегать таких некорректных обозначений.

Рассмотрим следующее утверждение $A(x,y)$ от двух переменных: «$0 <$

$< x+y <2 \vee xy <0$». Несложно заметить, что оно выполнимо на множестве целых чисел, так как оно истинно, например, при $x_1=2$, $y_1= -1$ и при $x_2= -2$, $y_2= 1$. Теперь заменим знак дизъюнкции «$\vee$» «более понятным» сложением «+». Получим утверждение $B(x,y)$: «$0 < x+y <2 + xy <0$», которое при подстановке значений x_1 и y_1 превращается в нелепую систему неравенств $0 <2+(-1) < 2 + 2\cdot(-1) < 0$ (!).

Предположим теперь, что мы не считаем автора записи $B(x,y)$ полным идиотом, и после некоторого размышления начинаем подозревать, что, по меньшей мере, один из знаков «плюс» в утверждении $B(x,y)$ может быть означает дизъюнкцию. Попробуем подставить её вместо первого «+», тогда получим утверждение $C(x,y)$: «$0 < x$ или $y <1 +xy < 0$». Равносильны ли утверждения $A(x,y)$ и $C(x,y)$?

6.2 Основные свойства элементарных булевых функций и соотношения между ними

Следующие равенства можно рассматривать и как логические законы, если считать, что переменные могут быть любыми утверждениями, а равенство воспринимать как равносильность утверждений (см. подразделы 3.2 и 3.3).

1. *А с с о ц и а т и в н о с т ь* операций $\vee, \wedge, \equiv, \oplus$:

$((x \circ y)\circ z) = (x \circ(y\circ z))$, где $\circ$ – любая из операций $\vee,\wedge,\equiv,\oplus$.

2. *К о м м у т а т и в н о с т ь* операций $\vee, \wedge, \equiv, \oplus, \uparrow, |$:

$x \circ y = y \circ x$, где $\circ$ – любая из операций $\vee, \wedge, \equiv, \oplus, \uparrow, |$.

3. *Д и с т р и б у т и в н о с т ь*:

а) $x\wedge(y \vee z)=(x\wedge y) \vee (x\wedge z)=xy \vee xz$ – конъюнкции относительно дизъюнкции;

б) $x \vee(x\wedge y)=(x \vee y)\wedge(x \vee z)$ – дизъюнкции относительно конъюнкции;

в) $x\wedge(y + z)=(x\wedge y) + (x\wedge z)=xy + xz$ – конъюнкции относительно сложения по модулю два.

4. *С в о й с т в а к о н с т а н т*:

а) $x \vee 0 = x$; б) $x \wedge 1= x$; в) $x \oplus 0 = x$;

– *н е й т р а л ь н о с т ь относительно операций*;

г) $x \oplus 1 = \bar{x}$; д) $x \vee 1=1$; е) $x \wedge 0=0$

– *свойства п о г л о щ е н и я.*

5. Закон «*и с к л ю ч е н н о г о т р е т ь е г о*»:

а) $x \vee \bar{x} = 1$;

двойственный к нему: б) $x \wedge \bar{x} = 0$.

6. *Н и л ь п о т е н т н о с т ь* сложения: $x \oplus x = 0$.

7. *И д е м п о т е н т н о с т ь* конъюнкции и дизъюнкции:

а) $x \wedge x = x$; б) $x \vee x = x$;

8. Закон *д в о й н о г о о т р и ц а н и я*: $\bar{\bar{x}} = x$.

9. Законы *д е М о р г а н а*: а) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; б) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

10. *О с н о в н о е* свойство импликации: $x \to y = \bar{x} \vee y$.

11. Свойства инверсии: а) $\bar{x} = x \mid x = x \uparrow x = 1 \oplus x$.

Убедиться в справедливости этих формул достаточно просто – нужно составить таблицы значений для функций, стоящих в левой и правой частях.

У п р а ж н е н и е 6.1 *Сделайте проверку этих тождеств, составив таблицы значений.*

Свойства ассоциативности и коммутативности операций $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ позволяют опускать скобки и использовать обозначения следующих видов:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \ldots x_n; \quad \bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n; \quad \bigoplus_{i=1}^{n} x_i = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

6.3 Существенные и фиктивные переменные, векторный способ задания

6.3.1 Переменная x_i называется *с у щ е с т в е н н о й* для функции $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, если найдутся значения других переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n$ ($\alpha_j \in \{0,1\}$) такие, что $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) \neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$.

Не существенные переменные называются *ф и к т и в н ы м и*.

П р и м е р 6.3 Исследуем функцию, заданную таблицей 6.4, для нахождения фиктивных переменных. Если найдём фиктивную переменную, мы её удалим. Начинаем проверку определения:

Таблица 6.4

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x – переменная существенная?

$f(0,0,0) = 1 \neq f(1,0,0) = 0$ => x – существенная переменная.

y – переменная существенная?

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = 1 = f(0,1,0) = 1; \\ f(0,0,1) = 0 = f(0,1,1) = 0; \\ f(1,0,0) = 0 = f(1,1,0) = 0; \\ f(1,0,1) = 0 = f(1,1,1) = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow y \text{ – фиктивная.}$$

z – переменная существенная?

$f(0,0,0) = 1 \neq f(0,0,1) = 0$ => z – существенная переменная.

Так как y – фиктивная переменная, то согласно определению те строки таблицы, где $y = 0$, повторяется в тех строках таблицы, где $y = 1$, и можно вычеркнуть либо те строки, где $y = 0$ (т.е. 1-ю, 2-ю, 5-ю и 6-ю), либо, где $y = 1$. Тем самым мы удалим фиктивную переменную, и в результате получим функцию уже только от двух переменных, значения

Таблица 6.5

x	z	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

которой приведены в таблице 6.5.

6.3.2 В начале этой главы уже обсуждался лексикографический порядок записи значений переменных. Далее везде только этот способ записи и будем употреблять. Но тогда нет смысла писать всю таблицу – достаточно указать только последний её столбец. Этот столбец, записанный в одну строку, когда порядку «сверху – вниз» соответствует порядок «слева – направо», называется *вектором значений* функции. Например, для функции f из примера 6.3 этот вектор записать как $f = (1,0,1,0,0,0,0,0)$ (по таблице 6.4), или как $f = (1,0,0,0)$ (по таблице 6.5).

Упражнение 6.2 *Имеются ли фиктивные переменные у функции, заданной таблицей 6.5? А сколько их у функции $g=(1,0,1,0,1,0,1,0)$?*

Упражнение 6.3 *Мы научились находить и исключать фиктивные переменные у функций, заданных таблицей значений. Попробуйте наоборот, ввести в таблицу фиктивные переменные.*

6.4 Двойственная функция

Функция, задаваемая формулой $\overline{f}(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}) = \neg f(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)$, называется *двойственной функцией* к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и обозначается в виде $f^*(x_1,\ldots,x_n)$.

Пример 6.4 $(x \,\&\, y)^* = (x \cdot y)^* = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = x \vee y$.

Предложение 6.1 *Функция, двойственная к двойственной для функции f, равна самой функции f, или $(f^*)^* = f$.*

Доказательство. $[f^*(x_1,\ldots,x_n)]^* = [\overline{f}(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})]^* = \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x_1}},\ldots,\overline{\overline{x_n}}) = f(x_1,\ldots,x_n)$.

Таблица 6.6 – Нахождение двойственной функции по таблице значений

x	y	z	h	h^*
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Рассмотрим, как найти таблицу значений двойственной функции, если сама функция задана в виде таблицы, в которой значения переменных упорядочены лексикографически. Замена набора $(x_1,\ldots,x_n)$ на $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$ соответствует «переворачиванию» таблицы. Действительно, наборы $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$ расположены симметрично относительно середины таблицы. Таковы, например, наборы (0,0,1) и (1,1,0) – один второй сверху, а другой – второй снизу (см. пример 6.5). Теперь остаётся применить операцию отрицания к результату функции, т.е. поменять *0* на *1* и *1* на *0*. Таким образом, вектор значений функции, двойст-венной к исходной, получается из вектора исходной функции «переворачиванием» и заменой *0* на *1*, а *1* на *0*.

П р и м е р 6.5 Нахождение двойственной функции по таблице и вектору значений. В таблице 6.6 показано как находится двойственная функция по таблице значений: чтобы вычислить значение двойственной функции h^* на наборе $(0,0,0)$, находим по таблице значение функции h на дополнительном наборе $(1,1,1)$, имеем $h(1,1,1)=1$, поэтому $h^*(0,0,0)=0$. Продолжая далее, в итоге получим значения, что приведены в последнем столбце таблицы 6.6

П р и м е р ы 6.6 Функции $x \wedge y$ и $x \vee y$, задаваемые векторами значений $(0,0,0,1)$ и $(0,1,1,1)$ двойственны друг к другу (хотя то, что эти функции двойственны, мы и так знаем на основании примера 6.4 и предложения 6.1). Также двойственными являются $x \oplus y$ и $x \equiv y$, задаваемые векторами $(0,1,1,0)$ и $(1,0,0,1)$. Каждая из функций x и $\overline{x}$ (векторы $(0,1)$ и $(1,0)$, соответственно) двойственна сама себе.

У п р а ж н е н и е 6.4 *Сформулируйте и обоснуйте правило нахождения двойственной функции по её вектору значений.*

Т е о р е м а 6.1 (П р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и). *Функция, двойственная к суперпозиции функций, равна суперпозиции двойственных функций:*

$$[f_0(f_1,\ldots,f_m)]^* = f_0^*(f_1^*,\ldots,f_m^*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $[f_0(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))]^* =$
$=\neg f_0(f_1(\neg x_1,\ldots,\neg x_n),\ldots,f_m(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)) = \neg f_0(\neg\neg f_1(\neg x_1,\ldots,\neg x_n),\ldots,\neg\neg f_m(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)) =$
$=\neg f_0(\neg f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\neg f_m^*(x_1,\ldots,x_n)) = f_0^*(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m^*(x_1,\ldots,x_n)).$

С л е д с т в и е 6.1 (Другая формулировка принципа двойственности). *Чтобы найти двойственную к функции, заданной формулой, нужно в этой формуле все функции заменить на двойственные.*

П р и м е р 6.7 Найдём двойственную к функции $f = (x\oplus z) \to ((\neg y \vee z) \wedge x)$. В эту формулу входит импликация, двойственная к ней не является элементарной. Поэтому вначале избавимся от импликации, воспользовавшись свойством 10 из подраздела 6.2: $f = \neg(x\oplus z) \vee ((\neg y \vee z) \wedge x)$. Теперь согласно следствию 6.1 и, применяя результаты примеров 6.4 и 6.6, получаем $f^* = \neg(x \equiv z) \wedge ((\neg y \wedge z) \vee x)$.